數學解題中「無到有」的感覺

許建銘
高雄市立龍華國民中學

一、前言：

英國一位難題研究專家曾經發表如下的問題：「如何在厚紙板上，切割出兩把套在同一圓圈的鑰匙(如圖 1-1)？但圓圈與鑰匙不可有縫隙。」初看這問題的人，大多會與筆者產生同樣疑問：「有可能嗎？」甚至於說，出題者先將圖 1-2 繪製在厚紙板上，再請觀者設法割出如 1-1 的圖，相信還是很多人會滿頭霧水且無計可施。

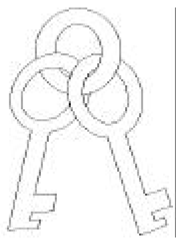


圖 1-1

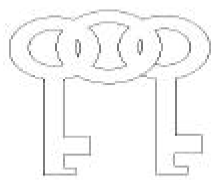


圖 1-2

要從圖 1-2 的厚紙板上，切割如圖 1-1 的圓圈與鑰匙，它的關鍵在於：用心「看透」鑰匙圈與鑰匙的交會處。只要將此交會處看成「重疊」的兩部分，問題就解決大半了。因為這圖是繪製在厚紙板上，所以可以作如下的割離：如圖 1-3，將粗黑線由上而下切到紙板一半厚度的位置；而虛線部分，則是由紙背往上反切到紙板的一半厚度，然後設法將四個「重疊」區域上下分開，就見得到如圖 1-1 的完成圖了。

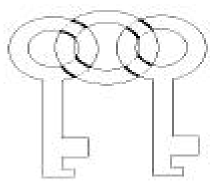


圖 1-3

另一道趣味數學問題是這樣問的：「圖 1-4 是利用 24 根棉花棒所擺成的 2 個正方形，請問如何操作可使它在移動其中 4 根後，變成 3 個正方形；又接著再移動其中 8 根，可以變成 9 個小正方形。」

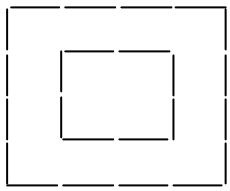


圖 1-4

這道問題我拿來給國三學生當假日「休閒小品」，同樣得到滿多學生的熱烈迴響。可惜只有極少數人想出正確解法(如圖 1-5)，大多數的學生僅解出問題前半部如何變成 3 個正方形的部分(如圖 1-6 至 1-9)，但因無法繼續移動作成 9 個小正方形，而宣告失敗或認定無解。

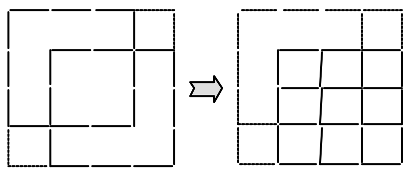


圖 1-5

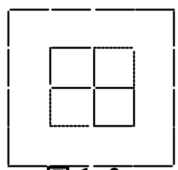


圖 1-6

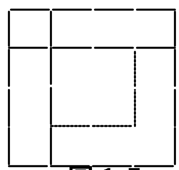


圖 1-7

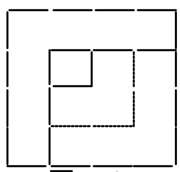


圖 1-8

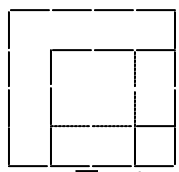


圖 1-9

為什麼想到圖 1-5 的學生比想到其它圖的學生少呢？仔細看看這五個圖，不難發現這幾個圖當中，就以圖 1-5 的左圖中，三個正方形同時重疊的區域為最多，而這也可能是它們比較不被學生「看開」來的主要原因。而圖 1-6 和圖 1-7，就是因為三個正方形沒有同時重疊的區域，所以是當中較容易被學生想到的兩個圖。

「看透」與「看開」兩種「從無到有」的「感覺」，其實也是幾何學上早已存在的解題觀點。由於受到現代電腦軟體的設計觀念，以及「形而上」生活哲學思維的影響，筆者才嘗試將這種解題思考呈現於解題步驟與數學教學上，當然更希望藉此文章，讓讀者感受到「思考之美」。

現在讓我為這種解題思考作進一步的說明：當我們看到一個幾何圖形時，首先要有「想得開」與「想得透」的「想法」，也就是說：不管無心或有心在看圖，都要感覺到這張圖可能是由多個畫在同一紙片上的圖所建構而成的「群組」。如果群組中每個圖的背景都是透明無色的，就較容易「看開」這些圖；如果群組中有一些圖的背景是有色的，此時就要借助敏銳的洞察力，才能「看透」紙片上可能「隱藏」的圖形，當然能「看透」，也就能「看開」了。

以上的說明，也同時確立了一個思考內涵：「想開」、「想透」、「看開」、「看透」，是一種以模擬的、動態的觀點來解幾何問題的分析方式，它們可以使幾何問題的解法更接近具象的操作，並走入較生活化的體驗。以下就列舉幾個數學問題，從解題中將可看到「魔術藥水」使遮遮掩掩的圖形「無所遁形」；「萬能鑰匙」解開層層疊疊的圖形並讓它們「躍然紙上」。

二、本文：(以下各圖的虛線部分，表示「看透」的圖形)

(一)問題 1：如圖 2-1，ΔABC中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{BE}\perp\overline{AC}$，$\overline{CD}\perp\overline{AB}$。

求證：$\overline{BE}=\overline{CD}$

【證 1】(1)看得開 ΔABE與ΔACD(如圖 2-2)

(2) $\because \overline{BE}$、$\overline{CD}$ 分別為 $\overline{AC}$、$\overline{AB}$ 邊上的高

$\therefore \angle AEB=\angle ADC=90°$

(3)又 $\angle A=\angle A$，$\overline{AB}=\overline{AC}$

$\therefore \Delta ABE\cong\Delta ACD$

故 $\overline{BE}=\overline{CD}$

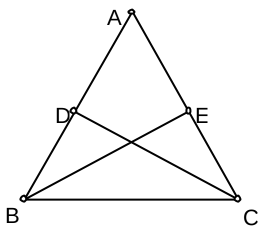


圖 2-1

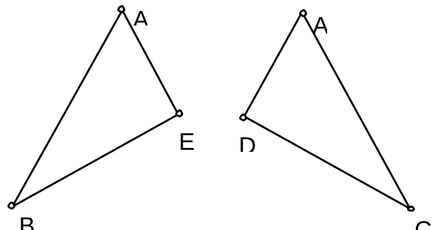


圖 2-2

【證 2】(1)看得開 ΔDBC與ΔECB(如圖 2-3)

(2) $\because \overline{CD}$、$\overline{BE}$ 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 邊上的高

$\therefore \angle BDC=\angle CEB=90°$

(3)又 $\overline{BC}=\overline{BC}$，$\angle DBC=\angle ECB$

$\therefore \Delta DBC \cong \Delta ECB$

故 $\overline{BE} = \overline{CD}$

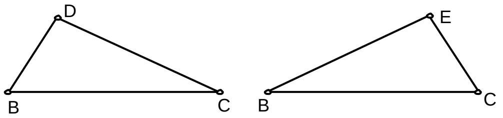


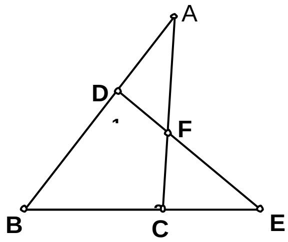
圖 2-3

(二)**問題 2：如圖 2-4，** $\angle 1 + \angle 2 = 160°$，$\angle A = 40°$，$\angle E = 35°$，**求** $\angle B$ **？**

【解 1】**看不開的解法：**

設 $\angle 1 = x°$，$\angle 2 = 160° - x°$

$\angle ADF = 180° - x°$，$\angle FCE = 20° + x°$



如圖 2-4

$180 - x + 40 = 20 + x + 35$

$\Rightarrow 2x = 165$

$\Rightarrow x = 82.5$

$\therefore \angle FCE = 102.5°$

$\Rightarrow \angle B = 102.5° - 40° = 62.5°$

【解 2】**看得開** ΔABC**與**ΔDBE (**如圖** 2-5)

$\angle B = \dfrac{360° - 40° - 35° - 160°}{2}$

$= \dfrac{125°}{2} = 62.5°$

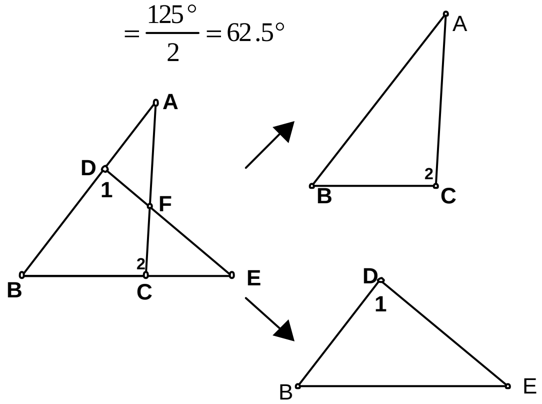


圖 2-5

(三)**問題 3：如圖 2-6，矩形** $ABCD$ **中，** $\overline{AB} = 6$，$\overline{BC} = 4$，BE **弧是以** $\overline{AB}$ **為半徑之圓的四分之一，**BF **弧是以** $\overline{BC}$ **為半徑之圓的四分之一，求斜線部分的面積？**

【解 1】**看不開(如圖** 2-7)**的解法：**

(1)**過** F **作** $\overline{FH} \perp \overline{AB}$

(2) $\overline{AB} = 6$，$\overline{BC} = \overline{CF} = \overline{BH} = 4$

$\Rightarrow \overline{AH} = 6 - 4 = 2$

$\Rightarrow$ **矩形**$ADFH$**面積** $= 2 \times 4 = 8$

(3)**區域** Q **的面積**

$= 4^2 - \dfrac{1}{4} \times p \times 4^2 = 16 - 4p$

(4)**斜線部分的面積**

$= 6^2 p \times \dfrac{1}{4} - 8 - (16 - 4p)$

$= 13p - 24$

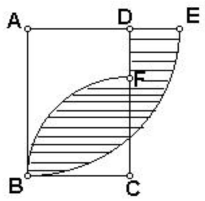


圖 2-6

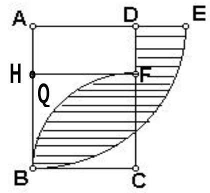


圖 2-7

【解 2】**看得開**①、②、③ (**如圖** 2-8)

斜線部分的面積=(①**加**②**減**③)**的面積**$= \dfrac{1}{4}(36p + 16p) - 24$

$= 13p - 12$

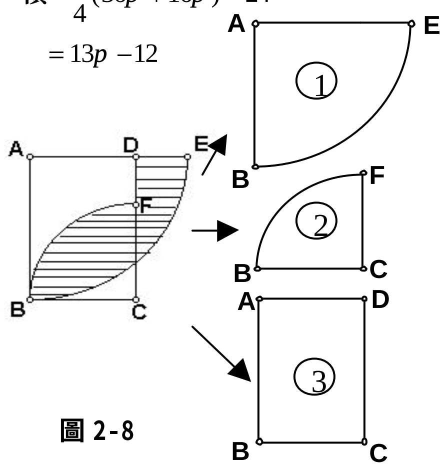


圖 2-8

(四)問題 4：如圖 2-9，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$ACDE$ 為正方形，求 $\angle EBC$ 的度數？

【解 1】看開等腰 ΔABE

設 $\angle ABE=\angle AEB=x°$

$\therefore \angle BAE=180°-2x°$

$\Rightarrow \angle BAC=90°-2x°$

$\Rightarrow \angle ABC=\dfrac{180°-(90°-2x°)}{2}$

$=45°+x°$

$\therefore \angle EBC=45°$

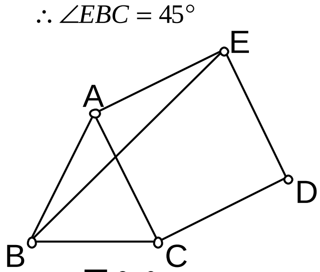


圖 2-9

【解 2】看透圓 A(如圖 2-10)

$\because \angle EAC=90°=CE$ 弧的度數

$\therefore \angle EBC=\dfrac{1}{2}\times 90°=45°$

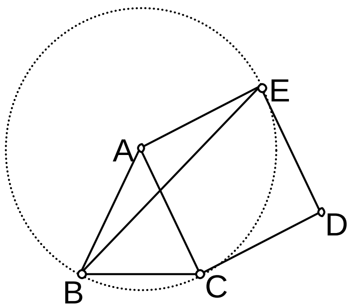


圖 2-10

(五)問題 5：如圖 2-11，正五邊形 $ABCDE$ 的兩條對角線 $\overline{AC}$，$\overline{BE}$ 相交於 P。

求證：$\overline{BC}=\overline{PC}$

【證 1】看開 ΔABC 與 ΔABE(如圖 2-12)

$\because \angle BAE=\angle ABC=108°$

$\therefore \angle 1=\angle 2=\angle 3=\dfrac{180°-108°}{2}=36°$

$\because \angle 4=108°-\angle 3=108°-36°=72°$

又 $\angle 5=\angle 2+\angle 3=36°+36°=72°$

$\Rightarrow \angle 4=\angle 5$　$\therefore \overline{BC}=\overline{PC}$

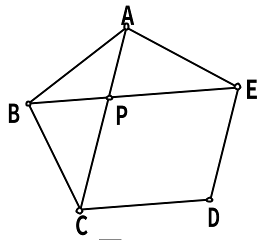


圖 2-11

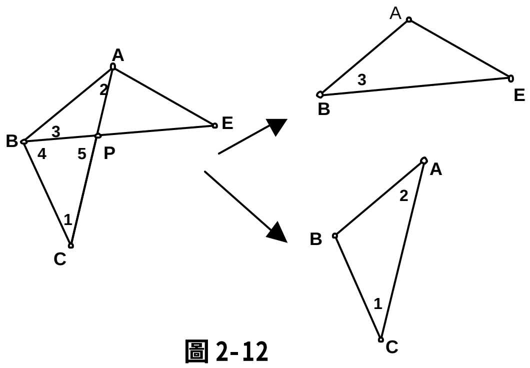


圖 2-12

【證 2】看透正五邊形 $ABCDE$ 的外接圓(如圖 2-13)

$\therefore \angle CBE=\dfrac{1}{2}CDE$ 弧的度數

$=\dfrac{1}{2}\times(\dfrac{2}{5}\times 360°)=72°$

又 $\angle BPC=\dfrac{1}{2}(BC$ 弧$+AE$ 弧$)$的度數

$=\dfrac{1}{2}\times(\dfrac{2}{5}\times 360°)=72°$

$\Rightarrow \angle CBE=\angle BPC$

$\therefore \overline{BC}=\overline{PC}$

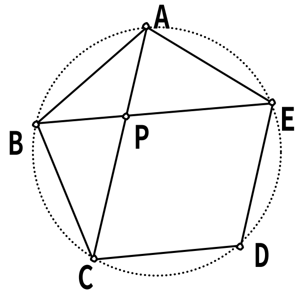


圖 2-13

(六)**問題 6：如圖 2-14，若** $\overline{AB}=\overline{AC}$ ，$\overline{AD}\,/\!/\,\overline{BC}$ ，**試證** $\overline{CD}+\overline{BD}>\overline{AB}+\overline{AC}$ 。

【證 1】(1)**看透以** $\overline{AD}$ **為軸，** ΔACD **的鏡射圖** ΔAED(**如圖** 2-14)

$\Rightarrow \angle 1=\angle 2$ ，$\overline{AE}=\overline{AC}$

(2) $\because \overline{AD}\,/\!/\,\overline{BC}$ $\quad \therefore \angle 2=\angle ACB$

$\Rightarrow \angle 1=\angle 2=\angle ACB=\angle ABC$

$\therefore \angle 1+\angle 2+\angle BAC$
$=\angle ABC+\angle ACB+\angle BAC=180°$

推得 B、A、E **三點共線**

(3) $\because \overline{DE}+\overline{BD}>\overline{BE}=\overline{AB}+\overline{AE}$

$\therefore \overline{CD}+\overline{BD}>\overline{AB}+\overline{AC}$

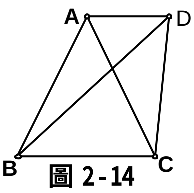


圖 2-14

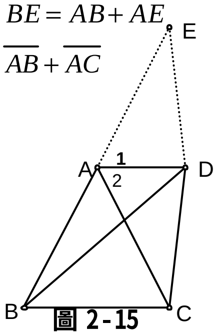


圖 2-15

【證2】(1)**看透** $\overline{BF}$ **為直徑的圓** A **與** ΔADF (**如圖** 2-16)

(2)**因為** $\overline{AD}/\!/\overline{BC}$

$\Rightarrow \angle 3=\angle ABC$，$\angle 4=\angle ACB$

又 $\angle ABC=\angle ACB$ $\quad \therefore \angle 3=\angle 4$

(3) $\because \overline{AF}=\overline{AC}$，$\angle 3=\angle 4$，$\overline{AD}=\overline{AD}$

$\therefore \Delta FAD\cong\Delta CAD \Rightarrow \overline{DF}=\overline{CD}$

(4) $\because \overline{DF}+\overline{BD}>\overline{AB}+\overline{AF}$

$\therefore \overline{CD}+\overline{BD}>\overline{AB}+\overline{AC}$

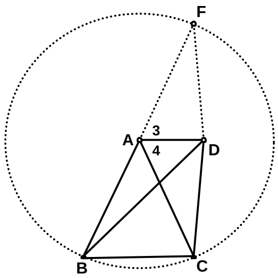


圖 2-16

(七)**問題 7：如圖 2-17，正** ΔABC **內部任一點** P，**且** $\overline{PD}\perp\overline{AB}$，$\overline{PE}\perp\overline{BC}$，$\overline{PF}\perp\overline{AC}$，**若** $\overline{AB}=a$，**試證：** $\overline{PD}+\overline{PE}+\overline{PF}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

【證 1】看透 ΔAPB**與**ΔAPC**與**ΔBPC(**如圖** 2-18)

由 ($\Delta APB+\Delta APC+\Delta BPC$) **的面積** $=\Delta ABC$ **面積**

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}\overline{PD}\times\overline{AB}+\dfrac{1}{2}\overline{PE}\times\overline{BC}+\dfrac{1}{2}\overline{PF}\times\overline{AC}$
$=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}(\overline{PD}+\overline{PE}+\overline{PF})\times a=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$

得證 $\overline{PD}+\overline{PE}+\overline{PF}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

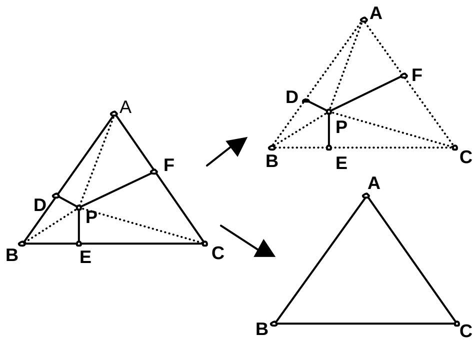


圖 2-18

【證 2】(1)**看透正** ΔAMN

(2)**看透** ΔAMN**和**ΔABC**的高** $\overline{AG}$ **和** $\overline{AH}$ (**如圖** 2-19)

(3)**因為** $\overline{PD}\perp\overline{AB}$，$\overline{PF}\perp\overline{AC}$，**由等腰三角形性質**

可推得 $\overline{PD}+\overline{PF}=\overline{AG}$

$\Rightarrow \overline{PD}+\overline{PE}+\overline{PF}=\overline{AG}+\overline{PE}=\overline{AG}+\overline{GH}=\overline{AH}$

得證 $\overline{PD}+\overline{PE}+\overline{PF}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

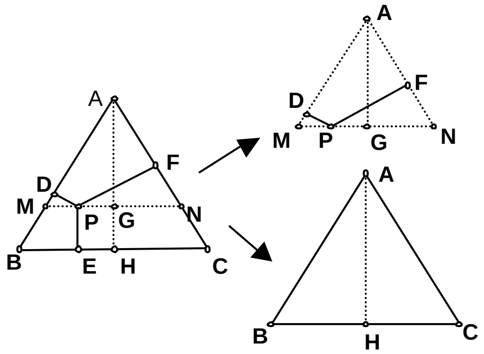


圖 2-19

(八)問題 8：有一個半徑為 1 的圓形硬幣，沿著直角三角形 ABC 的三邊內緣移動一周，若 $\angle B = 90°$， $\overline{AB} = 6$， $\overline{BC} = 8$，求硬幣掃過的面積？

【解】(1)如圖 2-20，設 $BDIG$ 為邊長 2 的正方形，

且 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$， $\overline{FG} \parallel \overline{AB}$，

$\overline{IH} \perp \overline{AC}$ 。

(2)看開 ΔADE、 ΔFGC、 ΔFIE、

ΔABC 為四個相似直角三角形。

(3) 因 為 $\overline{AD} = 6 - 2 = 4$ ， 所 以

$$\overline{DE} = 8 \times \frac{4}{6} = \frac{16}{3}$$

$$\Rightarrow \overline{IE} = \overline{DE} - \overline{DI} = \frac{16}{3} - 2 = \frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{IE}}{\overline{BC}} = \frac{5}{12}$$

$$\therefore \overline{IH} = \frac{6 \times 8}{10} \times \frac{5}{12} = 2$$

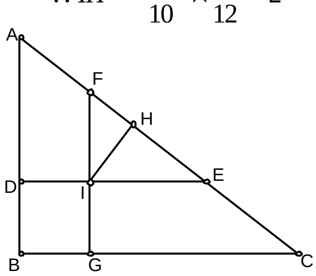


圖 2-20

由 $\overline{DI} = \overline{IG} = \overline{IH} = 2$，推得硬幣掃過如圖 2-21 的斜線區域。

以上(1)~(3)的解程目的，是解題者試圖求出 $\overline{IH}$ 的長，以斷定硬幣掃過的區域是否會產生「中空」（若 $\overline{IH} > 2$）的情形。然而若能看透 ΔABC 的內切圓(如圖 2-22 之右圖)，且算得半徑為 $\frac{6+8-10}{2} = 2$，當然可以更快推出硬幣掃過的區域圖形。

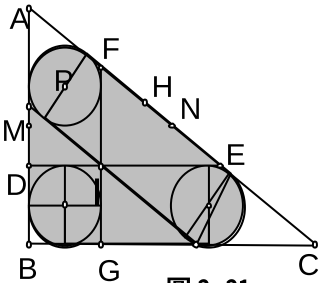


圖 2-21

(4)看透 ΔAMN (如圖 2-21， $\overline{MN}$ 為圓 P 的切線且平行 $\overline{BC}$)

因為圖 2-22 的左、右兩圖相似，

又圓 P 半徑為 1，而圓 S 半徑為 2

所以 $\overline{AM} = 6 \times \frac{1}{2} = 3$，

$$\overline{MN} = 8 \times \frac{1}{2} = 4$$

$$\Rightarrow \overline{BM} = 6 - 3 = 3$$

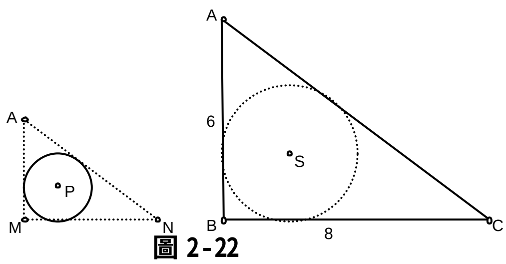


圖 2-22

(5)看開圓 P 與梯形 $MBCN$ (如圖 2-23)

$\therefore$ 斜線面積 = 圓 P 面積 + $MBCN$ 面積

$$= p + \frac{1}{2}(4+8) \times 3 = p + 18$$

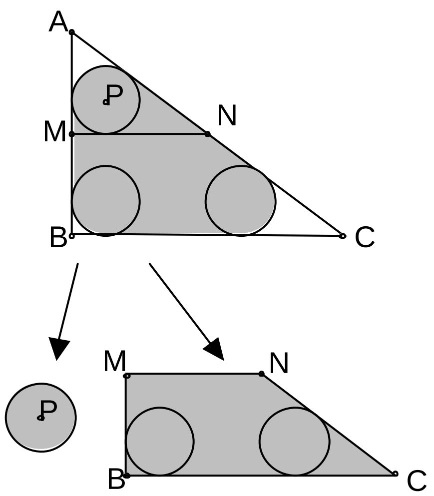


圖 2-23

三、結論：

如果將羽毛、草莓、猴子這三張圖卡，拿給幼兒選擇一項與香蕉相關的圖卡，研究幼兒認知發展的專家說，三歲以下的兒童會根據「猴子喜歡吃香蕉」的「情節特性」選擇猴子圖卡；而三歲以上的幼兒，會因感覺羽毛和香蕉的「外形相似」而選擇羽毛圖卡；若是年齡再稍大的兒童或成人，則可能以分類學的概念選擇草莓圖卡，因為兩者都是水果。

由此可知每個人對事物間關係連結的認知能力，會因為學習發展以及時空變遷等因素影響，造成一些差異或轉變。如同習慣以「作」「輔助線」的「外加」觀點來看待的某些圖形，如今也可以考慮用「看透」與「看開」，這種「原形畢露」的「內存」觀點來看待。就像「打電話」這件事，是從「打」演進至「撥」和「按」電話訊號，現代人「打電話」更可能連號碼鍵都不按（因為號碼已經內存在記憶體上），而改以更簡便的操作（如「音控」），就可以完成電話撥打的工作了。

一樣的東西，會隨著時空轉換、人事遷移，而有不同思考的生命展現。正如許多數學道理早已為人發現與認識，但透過許多有心人士的領會與傳播，就算同一份、最基礎的教材，也會吹動出不一樣的聲音、節奏與感覺。